数理解析研究所講究録
1085巻 1999年 151-158

ハイブリッド計算による Cauchy型特異積分方程式の解法について

愛媛大学工学部 甲斐博 (Hiroshi KAI)*
愛媛大学工学部 野田松太郎 (Matu-Tarou NODA)†

概 要

Hybrid Rational Function Approximation(HRFA) has been already proposed and applied to the areas of integral and data smoothing. In this paper, A method to obtain approximate solutions of Cauchy-type singular integral equations is considered by using HRFA. Driscoll and Srivastav proposed a method to approximate solutions of the equation by using rational approximation, e.g. Pad'e approximation. HRFA is also available in their method. It is shown that the values evaluated by hybrid computation are similar to the results obtained by numerical Lobatto-Chebyshev method.

1 はじめに

我々はすでに近似的GCD[5]を用いた有理関数近似の技法を提案しその有用性について議論している[4]。有理関数近似の中でも最も容易に得られる有理関数補間は、与えられた$f(x)$を近似する場合一般に不必要な極を持ち得られた近似が連続でなくなる。しかし我々は近似的GCDを用いて不必要な極を取り除くことを行い、連続な有理関数近似が得られることを示した。この方法をハイブリッド有理関数近似(HRFA)と呼ぶ。我々はハイブリッド有理関数近似の応用として定積分の近似[4]やデータの平滑化[3]等を示している。本論ではHRFAの応用範囲の拡大を考え、Cauchy型特異積分方程式の近似について考える。

流体動力学、破壊力学等の物理や工学における問題においてCauchy型特異積分方程式が有用である。一般にCauchy型特異積分方程式は次のように表される。

$$ag(x)+\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)dt}{t-x}+\lambda\int_{-1}^{1}k(x,t)g(t)dt=f(x),\ -1<x<1. \tag{1}$$

*kai@cs.ehime-u.ac.jp
†noda@cs.ehime-u.ac.jp

ここで、a, b, k, f は $[-1, 1]$ における各変数について Hölder 連続であり、端点 $-1, 1$ において積分可能な関数である。また、(1) 式の特異積分は主値積分

$$\int_{-1}^{1} \frac{g(t)dt}{t-x} = \lim_{\delta \to 0+} \left\{ \int_{-1}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{1} \right\} \frac{g(t)dt}{t-x}, \tag{2}$$

を表す。その特別な場合として本論では Cauchy 特異積分多項式の問題でも特に dominant equation

$$ag(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{g(t)dt}{t-x} = f(x),\ -1 < x < 1, \tag{3}$$

の数値計算法について考える。

(1) 式に対する数値解法には、Gauss-Chebyshev 法 [2]、Lobatto-Chebyshev 法 [6] 等が提案されている。また、特に dominant equation の近似解を求める場合に、Driscoll,Srivastav により有理関数近似を用いた方法 [1] が提案されている。その数値計算法では、$f(x)$ の有理関数近似をいかに高精度に近似するかが重要である。

本論では有理関数近似を用いた近似解法において HRFA を用いることを考える。HRFA を用いた場合の新しい数値結果を示し、Padé 近似等の他の数値計算法との数値比較を行う。

2 dominat equation の有理関数近似

我々は次の dominant equation を考える。

$$ag(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{g(t)dt}{t-x} = f(x),\ -1 < x < 1.$$

ここで、$a \pm ib \neq 0, a, b \in R$ であり、R は実数である。$g(x)$ は次のように表されると仮定する。

$$g(x) = w(x)\phi(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\phi(x). \tag{4}$$

ここで、$-1 < \mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) < 1$ であり、α, β は解 $g(x)$ の端点の特異点の性質を決定するパラメータである。この時、dominant equation は次式で表されることが示される [1]。

$$\frac{b}{\pi} \int_{-1}^{1} w(t) \left(\frac{\phi(t) - \phi(x)}{t-x} \right) dt = f(x), -1 < x < 1. \tag{5}$$

ここで $f(x)$ を有理関数で近似することを考える。部分分数分解された $f(x)$ に対する有理関数近似は次のように表される。

$$f(x) \approx f_R(x) = \sum_{i=1}^{p'} \sum_{j=1}^{\rho'_i} \frac{\hat{A}_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{q'} \sum_{j=1}^{\xi'_i} \frac{\hat{B}_{ij}}{(x-w_i)^j} + \sum_{i=1}^{q'} \sum_{j=1}^{\xi'_i} \frac{\hat{C}_{ij}}{(x-\bar{w}_i)^j}. \qquad (6)$$

また、$\phi(x)$ も同様に次の有理関数で近似されると仮定する。

$$\phi(x) \approx \phi_R(x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\rho_i} \frac{A_{ij}}{(x-r_i)^j} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{\xi_i} \frac{B_{ij}}{(x-z_i)^j} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{\xi_i} \frac{C_{ij}}{(x-\bar{z}_i)^j}. \qquad (7)$$

$f_R(x)$ と $\phi_R(x)$ を (5) 式に代入すると論文 [1] における (3.6) 式が成り立つ。それを書き直すと次の等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\rho_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{A_{ij} F_{jk}(r_i)}{(x-r_i)^k} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{\xi_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{B_{ij} F_{jk}(z_i)}{(x-z_i)^k} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{\xi_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{C_{ij} F_{jk}(\bar{z}_i)}{(x-\bar{z}_i)^k} =$$

$$\sum_{i=1}^{p'} \sum_{j=1}^{p'_i} \frac{\hat{A}_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{q'} \sum_{j=1}^{\xi'_i} \frac{\hat{B}_{ij}}{(x-w_i)^j} + \sum_{i=1}^{q'} \sum_{j=1}^{\xi'_i} \frac{\hat{C}_{ij}}{(x-\bar{w}_i)^j}. \qquad (8)$$

ここで、

$$F_{jk}(x) = -\frac{b}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{w(t)}{(t-x)^{j-k+1}} dt,$$

である。この式より、$p = p', \rho_i = \rho'_i, q = q', \xi_i = \xi'_i, r_i = \alpha_i, z_i = w_i, \bar{z}_i = \bar{w}_i$ が得られる。従って、係数比較と代入のみで A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} を決定できる。この方法において問題になるのは、いかに (6) 式を求めるかである。本論では (6) 式に HRFA を用いる。

3　HRFA とその dominant equation への応用

有理関数近似の中でも有理関数補間は最も簡単な近似の一つである。有理関数補間では、データ集合 $D = \{(x_i, f_i) | i = 0, \cdots, m+n\}$ を与えて、

$$r_{m,n}(x_i) - f_i = 0, \ i = 0, \cdots, m+n,$$

を満足する有理関数 $r_{m,n}(x)$ が求められる。ここで m, n はそれぞれ有理関数の分子と分母の多項式の次数であり、この時有理関数の次数を (m, n) と書く。有理関数補間は連立一次方程式や連分数を用いて求める事ができる。

与えられた関数 $f(x)$ の有理関数補間を求める場合は、$f_i = f(x_i)$ として同様に計算する。数値計算では $f(x_i)$ は浮動小数として表され適用される。

しかし、$f(x)$ が連続関数である場合、高精度な有理関数近似を得ようとして m, n を大きくすると有理関数補間が不必要な極をもつことが実験的に示された [4]。すなわち分母の多項式が不必要な零点を持つ。ここで、分子の多項式が不必要な分母の零点に近接した零点を持つならば分子と分母の多項式の近似的 GCD を計算する事により不必要な極を取り除く事ができる。計算手順は以下のようになる。

アルゴリズム　ハイブリッド有理関数近似 **(HRFA)**

入力 : 有限個のデータ集合 D,
近似的 GCD のための cutoff 値 $\epsilon (0 < \epsilon \ll 1)$

出力 : $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_{m+n}, f_{m+n})$ を近似する有理関数 $\tilde{r}(x) = \tilde{p}(x)/\tilde{q}(x)$

方法 :

1. 入力データを補間する (m, n) 有理関数

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum_{j=0}^{n} b_j x^j}, \quad b_0 = 1$$

を求める。

2. $p_m(x)$ と $q_n(x)$ の精度 ϵ の近似的 GCD $g(x)$ を求める。

$$g(x) = \mathrm{ApxGCD}(p_m(x), q_n(x); \epsilon)$$

3. 近似的に既約な有理関数

$$\tilde{r}(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} = \frac{\dfrac{p_m(x)}{g(x)}}{\dfrac{q_n(x)}{g(x)}}$$

を求める。ただし、多項式の除算は商を求める計算を行う。

Driscoll,Srivastav の方法において次のような手順で HRFA を応用する事ができる。

- $f(x)$ の HRFA $\tilde{r}(x)$ を求める。
- HRFA $\tilde{r}(x)$ の部分分数分解を求める。
- (8) 式により $\phi(x)$ の有理関数近似 $\phi_R(x)$ を求める。

ここで、浮動小数係数有理関数の完全部分分数分解である (6) 式への HRFA の変換方法が重要であるが、本論では部分分数分解はハイブリッド積分 [4] で用いた方法を利用する。すなわち、(6) 式の有理関数は

$$f(x) \approx f_R(x) = \sum_{i=1}^{p'} \frac{\hat{A}_{i1}}{x-\alpha_i} + \sum_{i=1}^{q'} \frac{\hat{B}_{i1}}{x-w_i} + \sum_{i=1}^{q'} \frac{\hat{C}_{i1}}{x-\bar{w}_i},$$

と表されることを仮定し、$\alpha_i, w_i, \bar{w}_i$ は Durand-Kerner 法により求め、$\hat{A}_{i1}, \hat{B}_{i1}, \hat{C}_{i1}$ は留数計算により求める。但し、この方法では HRFA の分母の多項式が重根や近接根を持つ場合には適用ができない。

4 例題と数値計算法との比較

次の airfoil equation として知られる例題 [1] を考える。

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{t-x} = f(x), \ -1 < x < 1.$$

ここで、g を (4) 式により近似し、$\alpha = \beta = -1$ の場合を考える。すなわち、

$$g(x) = \frac{\phi_R(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

である。また、解の一意性のため

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = 0,$$

と仮定する。

例題 1

$f(x) = e^x/(x^2+0.01^2)$ の場合を考える。$f(x)$ を

$$D = \{(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_{18}, f_{18})\},$$

と離散化する。ここで、$x_0 = -1, x_{18} = 1$ とし、x_i は -1 から 1 の間で等間隔の点である。D の有理関数補間は、有理関数の次数を $(8, 10)$ として求めた場合、

$$\begin{aligned}
r_{8,10}(x) &= p_8(x)/q_{10}(x), \\
p_8(x) &= -0.58574x^8 - 23.650x^7 - 458.10x^6 - 5351.2x^5 - 39182x^4 - 1.6824\times 10^5 x^3 \\
&\quad -3.2415\times 10^5 x^2 + 29241x + 1000, \\
q_{10}(x) &= -0.42523x^10 + 18.885x^9 - 393.29x^8 + 4869.0x^7 - 37470x^6 + 1.6886\times 10^5 x^5 \\
&\quad -3.4839\times 10^5 x^4 + 19258x^3 + 9965.2x^2 + 1.9241x + 1.0000,
\end{aligned}$$

である。しかし、分母の多項式 $q_{10}(x)$ は $x=-0.14000, 0.21159$ 近傍に零点を持ち $[-1,1]$ で特異になる。$p_8(x)$ はそれぞれ極に近い零点を持つため、近似的 GCD を計算して極を除去する事ができる。D に対する精度 $\epsilon=10^{-4}$ の HRFA を計算した場合、次の有理関数近似を得る。

$$
\begin{aligned}
\tilde{r}_{6,8}(x) &= \tilde{p}_6(x)/\tilde{q}_8(x),\\
\tilde{p}_6(x) &= 2.4755\times 10^{-5}x^6+0.0010013x^5+0.019433x^4+0.22757x^3+1.6728x^2\\
&\quad +7.2367x+14.267,\\
\tilde{q}_8(x) &= 1.7971\times 10^{-5}x^8-7.9681\times 10^{-4}x^7+0.016565x^6-0.20461x^5\\
&\quad +1.5693x^4-7.0300x^3+14.267x^2.-7.0300\times 10^{-4}x+0.0014267
\end{aligned}
$$

この場合は、$\tilde{r}_{6,8}(x)$ の分母の多項式の零点を Durand-Kerner 法を用いて数値的に安定して計算することができる。得られた零点を用いて次のように $\tilde{r}_{6,8}(x)$ の部分分数分解を求めることができる。

$$
\begin{aligned}
f_R(x) &= \frac{0.49999-49.998i}{x-0.010000i}+\frac{0.49999+49.998i}{x+0.010000i}+\frac{-4.6804-49.896i}{x-8.9231-1.7079i}\\
&\quad +\frac{-4.6804+49.896i}{x-8.9231+1.7079i}+\frac{4.6328-17.722i}{x-7.8645+5.1871i}+\frac{4.6328+17.722i}{x-7.8645-5.1871i}\\
&\quad +\frac{-0.45240+1.6453i}{x-5.3816+8.9108i}+\frac{-0.45240-1.6453i}{x-5.3816-8.9108i}.
\end{aligned}
$$

(8) 式を用いて $f_R(x)$ から得られる解を求めると、

$$
\begin{aligned}
\phi_R(x) &= \pi\left\{\frac{15.915+0.15916i}{x-0.010000i}+\frac{15.915-0.15916i}{x+0.010000i}+\frac{14.078-143.42i}{x-8.9231-1.7079i}\right.\\
&\quad +\frac{14.078+143.42i}{x-8.9231+1.7079i}+\frac{-17.894-51.806i}{x-7.8645+5.1871i}+\frac{-17.894+51.806i}{x-7.8645-5.1871i}\\
&\quad \left.+\frac{3.9169+4.0946i}{x-5.3816+8.9108i}+\frac{3.9169-4.0946i}{x-5.3816-8.9108i}\right\},
\end{aligned}
$$

が得られる。$\phi_R(x)$ を有理式に展開すると解に対する有理関数近似が次のように得られる。

$$
\begin{aligned}
\phi_R(x) &= \frac{p(x)}{q(x)},\\
p(x) &= +100.63x^7-4344.6x^6+92546x^5-1.1170\times 10^6x^4+8.7551\times 10^6x^3\\
&\quad -3.8392\times 10^8x^2+7.9391\times 10^8x-7866.3,\\
q(x) &= x^8-44.338x^7+921.74x^6-11386x^5+87329x^4-3.9118\times 10^5x^3\\
&\quad +7.9388\times 10^5x^2-39.118x+79.387.
\end{aligned}
$$

但し、浮動小数計算の誤差のため残る微小な複素数係数は零と見なした結果を示した。$\phi_R(x)$

は

$$\int_{-1}^{1} \frac{\phi_R(x)}{\sqrt{1-x^2}} dt = O(10^{-10}),$$

であるので条件を近似的に満足する。従って、近似解として $g(x) = \phi_R(x)/\sqrt{1-x^2}$ が得られる。得られた近似解の $x = 0$ での評価は

$$g(0) \approx -99.08773677287747,$$

である。ここで、Driscoll,Srivastav により与えられた数値結果は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \text{numerical Padé[1]} &: -100.0874, \\ \text{Gauss-Chebyshev 法 [1]} &: -96.28456, \\ \text{Lobatto-Chebyshev 法 [1]} &: -99.08774. \end{aligned}$$

ここで、Padé 近似 $p(x)/q(x)$ は $f(x)q(x) - p(x) = O(x^{10})$ となるように求められた場合の結果を示した。また、Gauss-Chebyshev 法や、Lobatto-Chebyshev 法は 1024 点の公式が用いられた。

この場合、本論の方法により 1024 点の Lobatto-Chebyshev 法と同精度の結果が得ることができる。dominant equation の近似解法において HRFA の有効性が示すことができた。

5　結び

HRFA を Cauchy 特異積分方程式の一つである dominant equation の近似解法に応用することを行った。解法としてはすでに提案されている有理関数近似を用いた方法 [1] を用い、有理関数近似として HRFA を使うことを考えた。例題では、(6, 8) 次の HRFA によるハイブリッド計算と、(4,4) 次の Padé 近似を用いた Driscoll,Srivastav の方法、1024 点の Gauss-Chebyshev 法、1024 点の Lobatto-Chebyshev 法等の数値計算法と比較し、本論の方法は 1024 点における Lobatto-Chebyshev 法による近似解と同精度の結果が得られることを示した。

しかし、一般的に HRFA の有効性を示すためには数値例だけでなくその誤差解析が重要な課題である。また、本論では分母の多項式は重根や近接根を持たないことを仮定した。重根や近接根を持つ場合、部分分数分解を求める効率的な方法の検討を行わなければならない。

参 考 文 献

[1] M. A. Driscoll and R. P. Srivastav : Rational function approximations in the numerical solution of Cauchy-type singular integral equations, Comp. and Maths. with Appls., **11**. 9, pp.949–965, 1985.

[2] F. Erdogan and G.D. Gupta : On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, Q. J. Applied Math., **30**, pp.525–534, 1972.

[3] 甲斐博, 野田松太郎：ハイブリッド有理関数近似とデータの平滑化, 日本応用数理学会論文誌,**3**,4,pp.323–336,1993.

[4] M.T. Noda, E. Miyahiro, and H. Kai : Hybrid rational function approximation and its use in the hybrid integration, in "Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations VII", eds. R. Vichnevetsky, D. Knight and G. Richter, pp.565–571, IMACS, 1992.

[5] Sasaki, T., and Noda, M.T.: Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations, J. Inf. Proc. **12**, pp.159–168, 1989.

[6] P.S. Theocaris and N.I. Ioakimidis : Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations, Q. J. of Applied Math., **35**, pp.173–183, 1977.